VECTORES

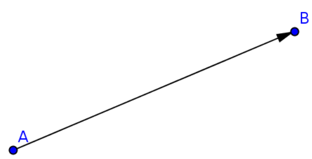
Abel Moreno Lorente

February 3, 2015

1 Aspectos gráficos.

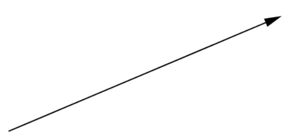
1.1 Definiciones.

Un vector entre dos puntos A y B es el segmento de recta orientado que tiene su origen en A y su extremo en B. A este vector se le denomina $\overrightarrow{AB}$.



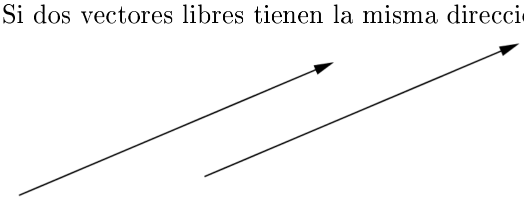
Un vector tiene una *dirección* (la de la recta que lo contiene u otra paralela), un *sentido* (el dado por el origen-extremo) y una longitud (a la que llamaremos *módulo del vector*, represemtado por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$).

Si precindimos de los puntos A y B sequimos teniendo un vector al que denominaremos vector libre, ya que no está fijo a ningún punto. Lo denominaremos $\overrightarrow{V}$.

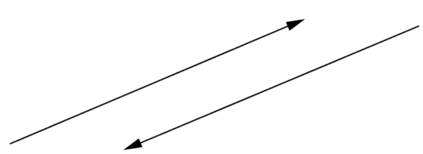


Este vector lo podemos mover y poner en cualquier parte del plano que nos interese.

Si dos vectores libres tienen la misma dirección, sentido y módulo, entonces son *equipolentes*.



Dos vectores son *opuestos* si tienen la misma dirección y módulo, pero sentidos opuestos.



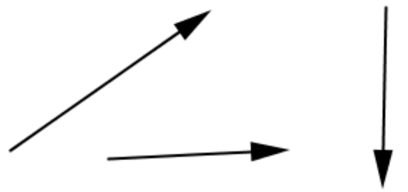
Dado un vector $\overrightarrow{V}$, el vector $-\overrightarrow{V}$ es un vector opuesto a $\overrightarrow{V}$.

Un vector diremos que es un *vector unitario* si su módulo, es decir, su longitud es uno.

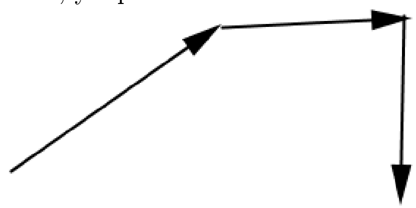
1.2 Operaciones con vectores.

1.2.1 Suma (y resta) de vectores:

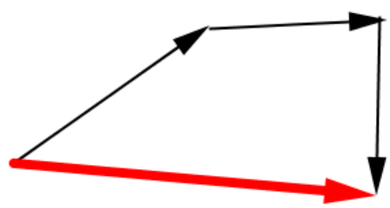
1. Uniendo extremos con orígenes.
   Supongamos que tenemos los tres vectores siguientes:



Unimos el origen del segundo con el extremo del primero y así sucesivamente (los encadenamos) sin importar el orden, ya que la suma es conmutativa:

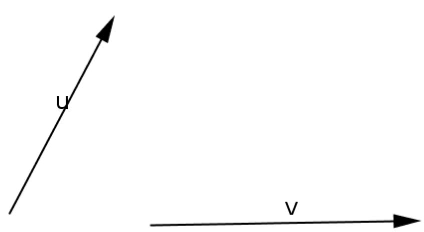


La suma de los tres es el vector que une el origen del primero con el extremo del último:

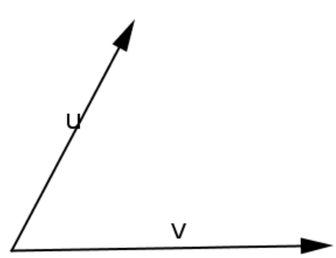


Para restar un vector $\overrightarrow{v}$ a otro $\overrightarrow{u}$, nos damos cuenta que restar un vector no es nada más que sumar el opuesto (cambiar el sentido a $\overrightarrow{v}$ y sumarlo), $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

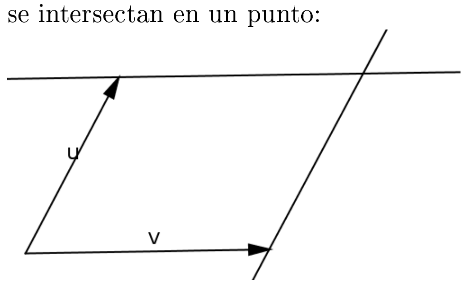
2. Regla del paralelogramo.
   Sirve para sumar o restar vectores de dos en dos. Supongamos que tenemos los dos vectores siguientes:



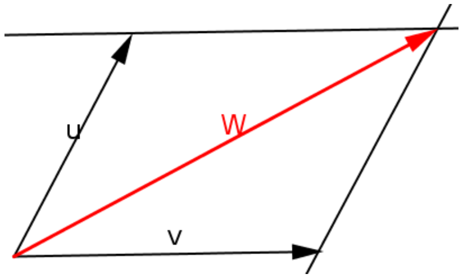
Colocamos los orígenes de ambos vectores en el mismo sitio, los unimos:



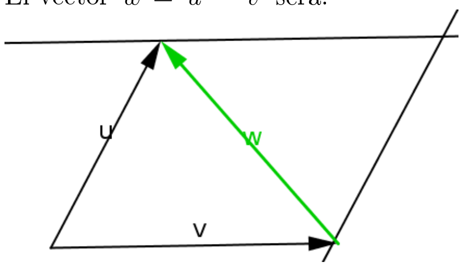
Por el extremo de $\overrightarrow{u}$ trazamos una paralela a $\overrightarrow{v}$, y por el extremo $\overrightarrow{v}$ de trazamos una paralela a $\overrightarrow{u}$. Ambas rectas se intersectan en un punto:



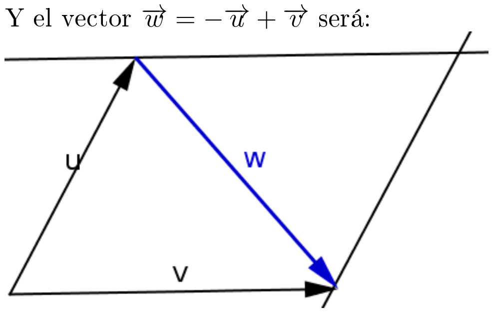
El vector que une el origen de ambos con la intersección de las rectas es la suma, $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$:



El vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ será:



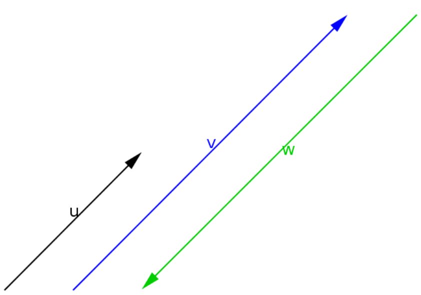
Y el vector $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ será:



1.2.2 Producto por un escalar.

El producto de un vector $\overrightarrow{v}$ por un escalar k (un escalar es un número), $k\overrightarrow{v}$ es un un nuevo vector con la misma dirección que $\overrightarrow{v}$, el módulo de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por k y si k es positivo la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ (si k es negativo el sentido es el opuesto).

En el siguiente ejemplo, dado el vector $\overrightarrow{u}$, representamos $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$:



1.2.3 Combinación lineal de vectores.

Una combinación lineal de vectores $\overrightarrow{w} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$ es un nuevo vector resultante de multiplicar los vectores por los escalares y sumarlos.

1.2.4 Producto escalar de dos vectores.

Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, su producto escalar (representado como $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$) es un escalar (un número) obtenido con la expresión:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\theta$

Es decir, el número obtenido es el resultado de multiplicar los módulos de los vectores y el coseno del ángulo que forman entre ellos.

Propiedades:

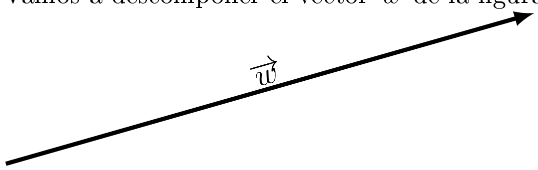
- Conmutativa:$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

- Distributiva repecto a la suma (resta):$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- Producto por un escalar:$k\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v})$
- Relación con el módulo de un vector:$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$

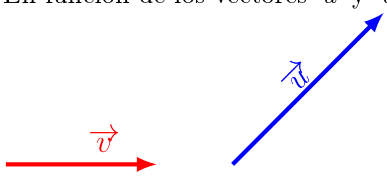
1.3 Descomposición vectorial.

Al realizar la combinación lineal de varios vectores el resultado es un nuevo vector. De forma análoga, si me dan un vector es posible expresarlo como una combinación lineal de uno o varios vectores. A esto se le llama descomposición vectorial.

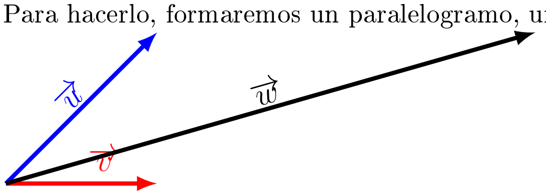
Vamos a descomponer el vector $\overrightarrow{w}$ de la figura



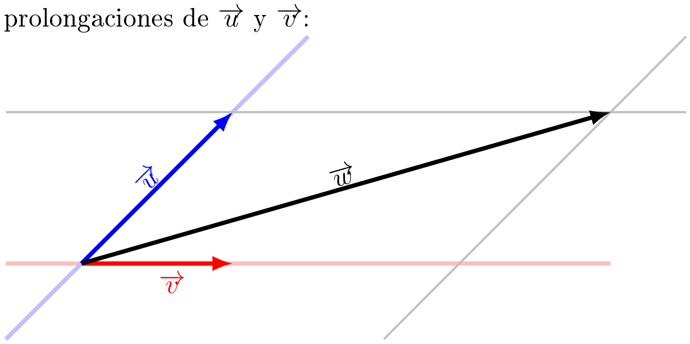
En función de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$



Para hacerlo, formaremos un paralelogramo, uniendo primero los orígenes de los vectores



y trazando ahora la línea paralela a $\overrightarrow{u}$ que pasa por el extremo de $\overrightarrow{w}$, la paralela a$\overrightarrow{v}$ que pasa por el extremo de $\overrightarrow{w}$ y las prolongaciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:



Las intersecciones de las prolongaciones de los vectores con las paralelas nos indican la cantidad de veces que interviene cada vector para sumarse y darnos $\overrightarrow{w}$, en este caso concreto podemos observar que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + 2,5\overrightarrow{v}$

1.4 Independencia lineal.

Un vector será linealmente independiente de otro conjunto de vectores si no puede expresarse como combinación lineal de aquellos. En caso contrario será linealmente dependiente.

Un conjunto de vectores será linealmente independiente si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás, es decir, se debe cumplir que no haya números reales $k_1, k_2, k_3, ...k_n$ que cumplan la condición $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n} = 0$

El número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial coincide con el número de dimensiones, así un plano puede tener un conjunto de dos vectores linealmente independientes, el espacio tridimensional un conjunto de tres vectores etc...

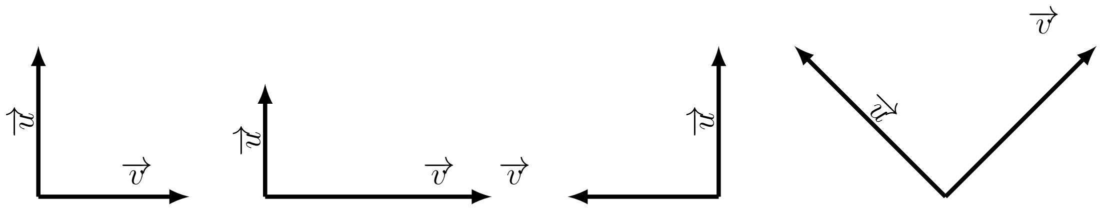
1.5 Base del espacio vectorial.

Un conjunto de vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ constituyen un *sistema generador* si cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos, es decir, si cualquier vector $\overrightarrow{w}$ se puede poner como $\overrightarrow{w} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v}, \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$

Si además los vectores son linealmente independientes, entonces forman una *base* del espacio vectorial, denominando a los números $k_1, k_2, \cdots k_n$ *componentes* del vector $\overrightarrow{w}$ en la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$

1.5.1 Bases ortogonales.

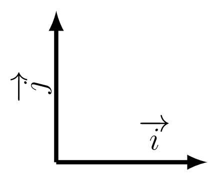
Si los vectores que forman una base son todos perpendiculares entre sí, diremos que forman una *base ortogonal.*



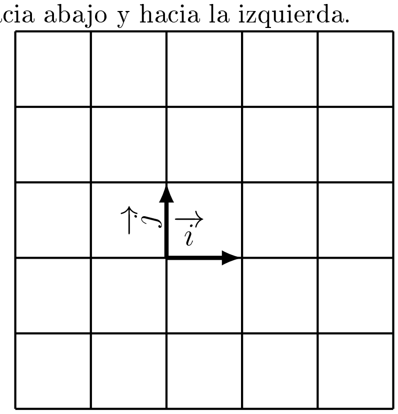
1.5.2 Bases ortonormales.

Si los los vectores de una base ortogonal son todos unitarios, es decir, sus múdulos son la unidad, entonces diremos que forman una *base ortonormal.*

A partir de este momento, a no ser que se especifique lo contrario, trabajaremos con bases ortonormales, concretamente con la base canónica que tiene por base a $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$en dos dimensiones y a $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ en tres dimensiones.



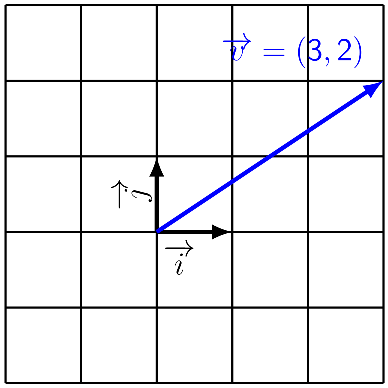
Una base a la que asignamos un punto como origen de coordenadas constituye un sistema de referencia. Nuestro sistema de referencia habitual nos define una malla con coordenadas positivas a la derecha y hacia arriba, y negativas hacia abajo y hacia la izquierda.



2 Aspectos numéricos.

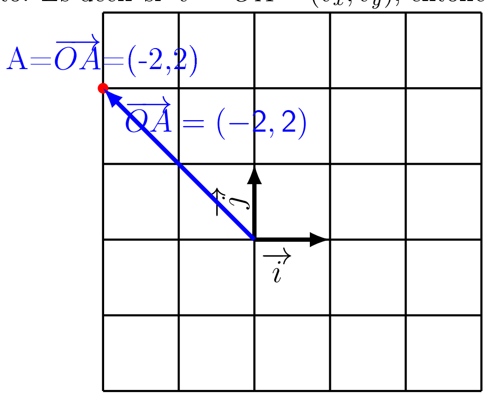
2.1 Coomponentes de un vector.

Si un vector $\overrightarrow{v}$ lo podemos expresar en la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ de la forma $\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{i} + k_2\overrightarrow{j}$ diremos que las componentes del vector son k_1 y k_2 y el vector lo expresaremos de la forma $\overrightarrow{v} = (k_1, k_2)$. En la práctica identificamos nuestro sistema de referencia con un sistema de ejes coordenados de los utilizados en el análisis de funciones, de tal manera que identificamos el eje horizontal del vector $\overrightarrow{i}$ con las "x" y el eje vertical del vector $\overrightarrow{k}$ con las "y". De esta manera, y a partir de ahora así será, el vector lo identificaremos como $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, siendo $v_x = k_1$ y $v_y = k_2$.



2.2 Coordenadas de un punto.

Dado un punto A en el plano, su coordenadas son las componentes del vector que une el origen de coordenadas con dicho punto. Es decir si $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OA}=(v_x,v_y)$, entonces $A=(v_x,v_y)$



2.3 Operaciones con vectores.

2.3.1 Producto por un escalar.

Dado un vector $\overrightarrow{v}=(v_x,v_y)$ y un escalar k, su producto es un nuevo vector de componentes $k\cdot v_x$ y $k\cdot v_y$.

$k\cdot\overrightarrow{v_x}=(k\cdot v_x,k\cdot v_y)$

Ejemplos: $\overrightarrow{v}=(-2,3)$

- $2\overrightarrow{v}=(2\cdot(-2),2\cdot 3)=(-4,6)$
- $-2\overrightarrow{v}=(-2\cdot(-2),-2\cdot 3)=(4,-6)$

2.3.2 Suma y resta.

La suma o resta de varios vectores es la suma o resta de sus componentes, $\overrightarrow{u}\pm\overrightarrow{v}=(u_x\pm v_x,u_y\pm v_y)$

Ejemplos: $\overrightarrow{v}=(-2,3)$, $\overrightarrow{u}=(1,5)$

- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(1-2,5+3)=(-1,8)$
- $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(1-(-2),5-3)=(3,2)$

2.3.3 Combinación lineal.

Una combinación lineal de vectores es otro vector resultado de realizar las operaciones indicadas aplicando las dos operaciones anteriores con las componentes: $\sum_{i=1}^n k_i\overrightarrow{v_i}=(\sum_{i=1}^n k_iv_{xi},\sum_{i=1}^n k_iv_{yi})$

Ejemplos: $\overrightarrow{v}=(-2,3)$, $\overrightarrow{u}=(1,5)$, $\overrightarrow{w}=(3,-2)$

- $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=2(1,5)+3(-2,3)-(3,-2)=(2\cdot1,2\cdot5)+(3\cdot(-2),3\cdot3)-(3,-2)=(2\cdot1+3\cdot(-2)-3,2\cdot5+3\cdot3-(-2))=(-7,21)$
- $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{w}=(1,5)+(4,-6)+(9,-6)=(14,-7)$

2.3.4 Producto escalar

En una base ortonormal, el producto escalar de dos vectores se calcula: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$

Ejemplos: $\overrightarrow{u} = (1,5)$, $\overrightarrow{v} = (-2,3)$

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = -2 + 15 = 13$

2.4 Aplicaciones.

2.4.1 Módulo de un vector.

Para calcular la longitud o módulo de un vector en una base ortonormal, nos damos cuenta de que el vector es la hipotenusa y sus componentes son los dos catetos, así que aplicando el teorema de pitágoras: $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

Ejemplo: $\overrightarrow{u} = (1,5)$, $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

2.4.2 Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos A y B es la longitud (módulo) del vector entre ambos puntos, $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Ejemplo: La distancia entre A=(1,1) y B=(3,3) será $d(A,B) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

2.4.3 Punto medio entre dos puntos.

Dados dos puntos A y B, el punto medio entre ellos (M_{AB}) será el punto definido por la suma del vector $\overrightarrow{OA}$ más la mitad del vector $\overrightarrow{AB}$. Operando la expresión:

$M_{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\frac{1}{2}AB}) = (A_x, A_y) + \frac{1}{2}(B_x - A_x, B_y - A_x) = (A_x + \frac{1}{2}B_x - \frac{1}{2}A_x, A_y + \frac{1}{2}B_y - \frac{1}{2}A_y) = (\frac{1}{2}A_x + \frac{1}{2}B_x, \frac{1}{2}A_y + \frac{1}{2}B_y) = (\frac{A_x + B_x}{2}, \frac{A_y + B_y}{2})$

Es decir, las coordenadas del punto medio es la media de las coordenadas de los extremos.

Ejemplo: El punto medio entre A=(1,1) y B=(3,3) será $M_{AB} = (\frac{1+3}{2}, \frac{1+3}{2}) = (2,2)$

2.4.4 División de un segmento en n trozos.

Dados dos puntos A y B que definen un segmento, las coordenadas del punto k-ésimo de la división del segmento en n trozos serán: $M_k = A + \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}$

Ejemplo: La coordenadas de los puntos que dividen el segmento definido por los puntos A=(0,0) y B=(4,4) en 4 partes iguales (n=4) serán:

$\frac{\overrightarrow{AB}}{4} = \frac{(4,4)}{4} = (1,1)$

$M_0 = (0,0) + 0 \cdot (1,1) = (0,0) = A$

$M_1 = (0,0) + 1 \cdot (1,1) = (1,1)$

$M_2 = (0,0) + 2 \cdot (1,1) = (2,2)$

$M_3 = (0,0) + 3 \cdot (1,1) = (3,3)$

$M_4 = (0,0) + 4 \cdot (1,1) = (4,4) = B$

2.4.5 Ángulo entre dos vectores.

Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$en una base ortonormal, podemos calcular su producto escalar de dos maneras diferentes:

Con la definición: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\theta$

En una base ortonormal: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$

Igualamos ambas expresiones:$|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\theta = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$

Despejamos el coseno: $\cos\theta = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$

Una vez calculado cuánto vale el coseno, calculamos el ángulo con el arco coseno.

Ejemplos: Calcular el ángulo entre $\overrightarrow{u} = (1,5)$ y $\overrightarrow{v} = (-2,3)$

$\cos\theta = \frac{1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3}{\sqrt{1^2+5^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+3^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = 0,707$

$\theta = \arccos 0,707 = 45^o$