NÚMEROS COMPLEJOS
Abel Moreno Lorente

1 Origen

El concepto de número se ha ido ampliando según han ido complicándose las necesidades y conocimientos de la humanidad. Tras los números naturales, no se tardaría mucho en ver que eran necesarios números fracionarios para partir cosas. Los números negativos (y los enteros) no entraron en acción hasta fines de la edad media, pero hoy son imprescindibles.

Igualmente, al resolver ecuaciones de segundo grado aparecen raíces cuadradas de números negativos que no sabemos calcular. ¿Quiere esto decir que no existen, o que simplemente no sabemos calcularlas?

Al intentar calcular una raiz de un número negativo, siempre podemos factorizar dicho número como -1 por ese mismo número pero positivo:$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)}$ y este producto de factores lo podemos separar en dos raices diferentes, una con un número positivo y otra con -1: $\sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$. A esta raíz de -1 la denominamos i, es decir, $i = \sqrt{-1}$. Esta i es lo que denominamos "unidad imaginaria", y al igual que los números reales constituyen una recta, la unidacd imaginaria nos extiende dicha recta a un plano, el plano de los números complejos.

2 Formas de expresar los números complejos.

2.1 Forma binómica.

Cualquier número complejo lo podemos expresar como una combinación de una "cantidad real" y otra "cantidad imaginaria", por ejemplo la solución de la ecuación $x^2 - 2x + 10 = 0$ es $x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2}$ que podemos expresar como $x = \frac{2}{2} \pm \frac{6}{2} i = 1 \pm 3i$. 1 es la parte real y 3 (o -3) es la parte imaginaria. (Esta ecuación tiene dos soluciones, $x = 1 + 3i$ y su *conjugada*, $x = 1 - 3i$, que consiste en cambiarle el signo a la parte imaginaria)

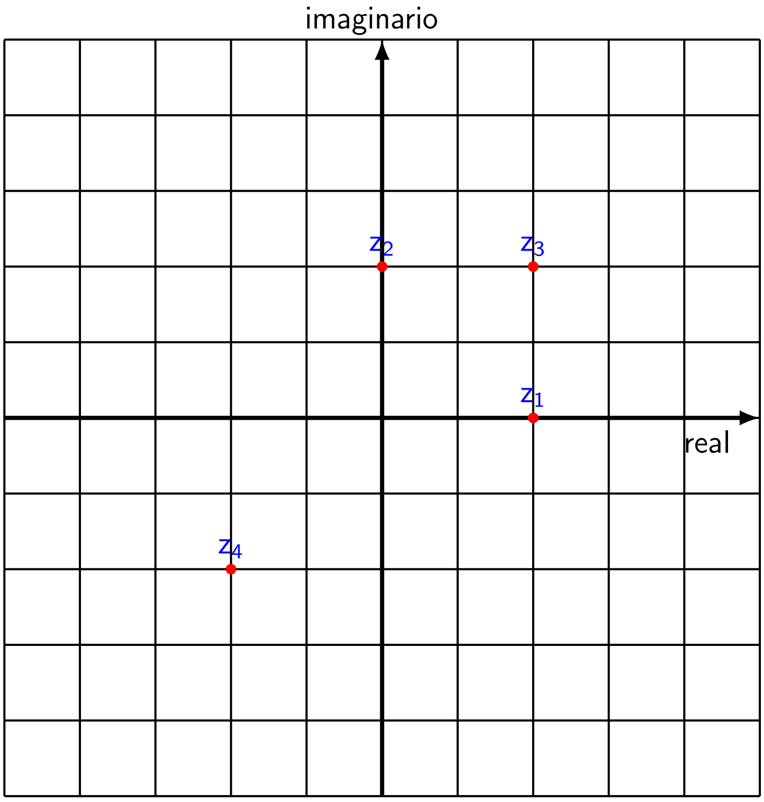
Así, un número complejo z lo representamos como la suma de una parte real a y una imaginaria b, es decir, $z = a + bi$

Dos números complejos son iguales si coincide su parte real e imaginaria, $z_1 = z_2$si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

2.1.1 Representación en el plano complejo.

El plano complejo está formado por los ejes cartesianos de tal manera que el eje de abcisas (las "x") se corresponde con la parte real del número complejo y el eje de ordenadas (las "y") con la parte imaginaria, de esa manera la parte real e imaginaria de un número complejo son las coordenadas de dicho punto:

$z_1 = 2 = 2 + 0i$
$z_2 = 2i = 0 + 2i$
$z_3 = 2 + 2i$
$z_4 = -2 - 2i$



2.1.2 Módulo de un número complejo.

El módulo de un número complejo es el módulo del vector que une el origen de coordenadas con el número complejo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

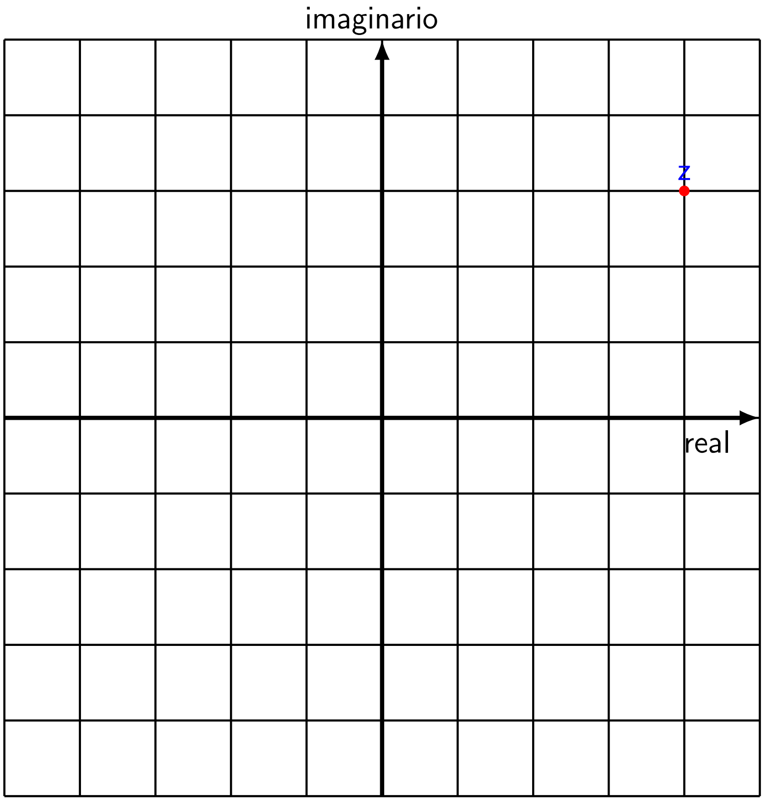
2.1.3 Conjugado de un número complejo:

Dado un número complejo $z = a + bi$, su complejo, representado por z^*es el resultado de cambiarle el signo a la parte imaginaria: $z^* = a - bi$

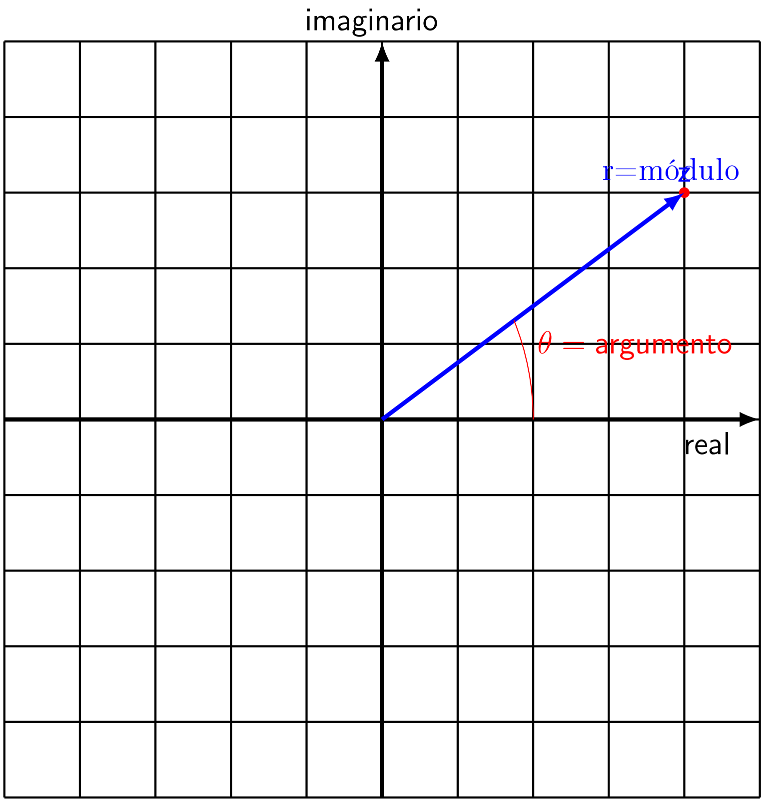
Comprueba que $z \cdot z^* = |z|^2$.

2.2 Forma polar.

Dado un número complejo en forma binómica, $z = a + bi$ (por ejemplo, $z = 4 + 3i$) y su representación gráfica:



Podemos expresar las coordenadas de ese punto en coordenadas polares, es decir, dando la distancia del punto al origen de coordenadas (a lo que denominamos *módulo*, representado por r) y el ángulo con el eje imaginario (a lo que denominamos *argumento*, representado por θ):$z = r_\theta$



2.3 Forma trigonométrica.

Dada una circunferencia goniométrica, sabemos que el eje de las abcisas se corresponde con el valor del coseno del ángulo y el eje de ordenadas con el valor del seno del ángulo, con lo que dado un número complejo en forma polar $z = (r, \theta)$ lo podemos escribir en forma trigonométrica como $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

2.4 Forma exponencial.

La fórmula o relación de Euler establece que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, relacionando las exponenciales complejas con las trigonométricas. Estas exponenciales son extremadamente importantes para describir el movimiento ondulatorio, la propagación de ondas (una onda propagándose por el espacio, o una partícula, se expresa $e^{i(wt \pm kx)}$).

El número complejo $z = r_\theta$lo podemos expresar como $z = r \cdot e^{i\theta}$

3 Cambio de una forma a otra.

Para pasar de una forma de expresarlos a otra utilizaremos nos fijamos en que la forma polar, trigonométrica y exponencial utilzan los mismos argumentos: r y θ , luego el único problema se encuentra en transformar de la binómica a la polar y viceversa:

3.1 De binómica a polar.

Dado el número complejo $z = a + bi$, para transformarlo a forma polar lo hacemos:

- Módulo: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argumento: $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$. Pero ojo, para seleccionar el ángulo correcto debemos fijarnos en qué cuadrante se encuentra el número complejo.

3.2 De polar a binómica.

Dado el número complejo $z = r_\theta$, para transformarlo a su forma binómica hacemos:

- Parte real: $a = r \cdot \cos\theta$
- Parte imaginaria$b = r \cdot \sin\theta$

4 Operaciones con números complejos.

4.1 Potencias de i.

Dado que $i = \sqrt{-1}$ nos damos cuenta de que:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = \sqrt{-1} = i$
- $i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 i = i$
- $i^6 = i^5 i = -1$
- $i^7 = i^6 i = -i$

Luego podemos ver que se repite la secuencia $1, i, -1, -i$ así que dividimos el exponente entre 4 y el resto nos da el valor $(0 \to 1, 1 \to i, 2 \to -1, 3 \to -i)$.

4.2 Operaciones.

Según sean las operaciones, será mejor utilizar la forma binómica o la polar, según nos convega:

	Forma binómica	Forma Polar
Suma y resta	$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$	
Producto	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$	$r_\theta \cdot s_\delta = (r \cdot s)_{\theta+\delta}$
Cociente	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{a_2^2 + b_2^2}$ $(z_2 \neq 0)$	$\frac{r_\theta}{s_\delta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\theta-\delta}$ $(s \neq 0)$
Potenciación	$z^n = z \cdot z \cdots z$	$(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$
Radicación		$\sqrt[n]{r_\theta} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta + 2\pi k}{n}}$ $,k \in \mathbb{Z}$

4.3 Fórmula de Moivre.

Ya que la potencia de un número complejo en forma polar es $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$, este mismo resultado en forma trigonométrica será $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

Esta relación es importante para calcular $\cos n\alpha$ y $\sin n\alpha$